# 第八章 数列

## 模块一 等差、等比数列问题

### 第 1 节 等差、等比数列的基本公式（★★）

**内容提要**

诸多等差、等比数列问题，都可以直接代通项公式、前 $n$ 项和公式解决，所以熟悉基本公式非常重要.

1．等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d=pn+q$，其中 $p=d$，$q=a_1-d$.

2．等差数列的前 $n$ 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=An^2+Bn$，其中 $A=\dfrac{d}{2}$，$B=a_1-\dfrac{d}{2}$.

3．等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$.

4．等比数列的前 $n$ 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\end{cases}$.

**典型例题**

**类型Ⅰ：等差数列的通项公式与前 $n$ 项和公式**

【例 1】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $a_5=5$，$a_1+S_{11}=67$，则 $S_5=$______.

**解析：**已知和所求都容易套公式，可将已知翻译成关于 $a_1$ 和公差 $d$ 的方程组并求解，再算 $S_5$，



由题意，$\begin{cases}a_5=a_1+4d=5\\ a_1+S_{11}=a_1+11a_1+55d=67\end{cases}$，解得：$a_1=d=1$，所以 $S_5=5a_1+10d=15$.

**答案：**15

【变式 1】等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_6+a_7=18$，则 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7$ 的值为（　　）

（A）$-6$　　（B）$-3$　　（C）3　　（D）6

**解析：**已知条件和要求的量都容易用公式表示，直接套用公式翻译它们，

由题意，$a_2+a_6+a_7=a_1+d+a_1+5d+a_1+6d=3a_1+12d=18$，所以 $a_1+4d=6$ ①，

故 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7=\dfrac{1}{2}(a_1+8d)-(a_1+6d)=-\dfrac{1}{2}a_1-2d=-\dfrac{1}{2}(a_1+4d)$，结合式①可得 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7=-3$.

**答案：**B

【变式 2】已知 $S_n$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，若 $a_1+a_3=6$，$S_5=S_3+11$，则 $\dfrac{S_n+8}{a_n-1}$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{11}{2}$　　（B）$\dfrac{28}{5}$　　（C）$\dfrac{17}{3}$　　（D）$\dfrac{13}{2}$

**解析：**给的两个条件都容易用公式表示，故直接套用公式，即可求出 $a_1$ 和 $d$，

因为$\begin{cases}a_1+a_3=6\\S_5=S_3+11\end{cases}$，所以$\begin{cases}2a_1+2d=6\\5a_1+10d=3a_1+3d+11\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=2\\d=1\end{cases}$，

$a_n$和$S_n$就能求出来了，进而可将$\dfrac{S_n+8}{a_n-1}$表示为关于$n$的单变量函数，研究最值，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n+1$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2+n+1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}$，

故$\dfrac{S_n+8}{a_n-1}=\dfrac{\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}+8}{n+1-1}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{8}{n}+\dfrac{3}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{8}{n}}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}$，

当且仅当$\dfrac{n}{2}=\dfrac{8}{n}$，即$n=4$时取等号，所以$(\dfrac{S_n+8}{a_n-1})_{\min}=\dfrac{11}{2}$.

**答案：**A

【变式 3】已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为公差不为 0 的等差数列，且满足$a_3=b_2$，$a_6=b_4$，则$\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）3

**解析：**观察目标式可发现分子分母容易化为公差，故先化简目标式，

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公差分别为$d_1$，$d_2$，$d_1\ne 0$，$d_2\ne 0$，则$\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=\dfrac{3d_1}{d_2}$ ①，



所以只需找$d_1$，$d_2$的关系，故把已知条件用通项公式翻译，并消掉无关项，

由题意，$\begin{cases}a_3=b_2\\a_6=b_4\end{cases}$，所以$\begin{cases}a_1+2d_1=b_1+d_2\\a_1+5d_1=b_1+3d_2\end{cases}$，

两式作差消去$a_1$，$b_1$可得：$-3d_1=-2d_2$，所以$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{2}{3}$，代入①得$\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=\dfrac{3d_1}{d_2}=2$.

**答案：**A

**【总结】**可以看出，基本公式的功能就很强大，在诸多等差数列问题中，用通项公式与前$n$项和公式翻译已知条件，求出$a_1$和$d$，或找到它们的关系，即可解决问题.

**类型Ⅱ：等比数列的通项公式与前$n$项和公式**

【例 2】（2023·全国乙卷）已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，$a_9a_{10}=-8$，则$a_7=$______.

**解析：**已知和要求的都容易用通项公式翻译，故直接翻译它们，

$a_2a_4a_5=a_3a_6\Rightarrow a_1qa_1q^3a_1q^4=a_1q^2a_1q^5$，化简得：$a_1q=1$ ①，$a_9a_{10}=-8\Rightarrow a_1q^8a_1q^9=a_1^2q^{17}=-8$ ②，

由①可得$a_1=\dfrac{1}{q}$，代入②得：$q^{15}=-8$，所以$q^5=-2$ ③，结合①③可得$a_7=a_1q^6=a_1q\cdot q^5=q^5=-2$.

**答案：**$-2$

【变式 1】（2022 • 全国乙卷）已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

（A）14　　（B）12　　（C）6　　（D）3

**解析：**由已知条件容易建立关于$a_1$和$q$的方程组，求出$a_1$和$q$，进而求得$a_6$，

设$\{a_n\}$的公比为$q$，由题意，$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=168\\ a_2-a_5=a_1q(1-q^3)=a_1q(1-q)(1+q+q^2)=42\end{cases}$，

两式相除得：$\dfrac{1}{q(1-q)}=4$，解得：$q=\dfrac{1}{2}$，所以$a_1=96$，故$a_6=96\times(\dfrac{1}{2})^5=3.$

**答案：**D

【变式 2】已知正项等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，满足$S_4-2S_2=3$，则$S_6-S_4$的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）3　　（C）4　　（D）12

**解析：**涉及到的下标较小，直接通过列项来翻译已知和所求较方便，

由题意，$S_4-2S_2=(a_1+a_2+a_3+a_4)-2(a_1+a_2)=a_3+a_4-a_1-a_2$

$=(a_1+a_2)q^2-(a_1+a_2)=(a_1+a_2)(q^2-1)=3$ ①，而$S_6-S_4=a_5+a_6=(a_1+a_2)q^4$ ②，

对比①②发现可由①反解出$a_1+a_2$，代入②消元，化为关于$q$的单变量表达式分析最值，

由①可得$a_1+a_2=\dfrac{3}{q^2-1}$，代入②得$S_6-S_4=\dfrac{3}{q^2-1}\cdot q^4=\dfrac{3(q^4-1)+3}{q^2-1}=\dfrac{3(q^2+1)(q^2-1)+3}{q^2-1}$



$=3(q^2+1)+\dfrac{3}{q^2-1}=3(q^2-1)+\dfrac{3}{q^2-1}+6$，

还需判断$q^2-1$的正负，才能用均值不等式求最值，可结合式①判断，

因为$\{a_n\}$是正项等比数列，所以$a_1+a_2>0$，结合式①可得$q^2-1>0$，

所以$S_6-S_4=3(q^2-1)+\dfrac{3}{q^2-1}+6\ge 2\sqrt{3(q^2-1)\cdot\dfrac{3}{q^2-1}}+6=12$，当且仅当$3(q^2-1)=\dfrac{3}{q^2-1}$时等号成立，

此时，$q=\sqrt{2}$，故$S_6-S_4$的最小值为 12.

**答案：**D

**【反思】**单条件的等比数列问题中，可考虑翻译已知条件，建立变量间的关系，用于化简目标式.

**【总结】**从上面几道题可以看出，在诸多等比数列问题中，用通项公式和前$n$项和公式翻译已知条件，求出$a_1$和$q$，或找到它们的关系，即可解决问题.

**类型Ⅲ：等差、等比数列综合题**

【例 3】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且$a_2$，$a_3+2$，$a_8$构成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=2^{a_n}+9$，记$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，若$S_n\ge 2023$，求正整数$n$的最小值.

**解：**（1）（条件容易直接代公式，求出$d$，即可求得通项）

设$\{a_n\}$的公差为$d$，因为$a_2$，$a_3+2$，$a_8$成等比数列，所以$(a_3+2)^2=a_2a_8$，

故$(a_1+2d+2)^2=(a_1+d)(a_1+7d)$，将$a_1=2$代入整理得：$d^2=4$，解得：$d=\pm 2$，

（别忘了检验$d=\pm 2$是否都满足题意，因为$(a_3+2)^2=a_2a_8$只是$a_2$，$a_3+2$，$a_8$成等比数列的必要条件）

经检验，当$d=-2$时，$a_2=a_1+d=0$，与题意不符，所以$d=2$，故$a_n=a_1+(n-1)d=2n$.

（2）$b_n=2^{a_n}+9=2^{2n}+9=4^n+9$，（$4^n$是等比数列，可以求和，故对$4^n$和9分别求和再相加）

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4^1+9+4^2+9+\cdots+4^n+9=(4^1+4^2+\cdots+4^n)+(9+9+\cdots+9)$

$=\dfrac{4\times(1-4^n)}{1-4}+9n=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+9n=\dfrac{1}{3}\times 4^{n+1}+9n-\dfrac{4}{3}$，

（再看不等式$S_n\ge 2023$的解集，直接解困难，但显然可发现$S_n$随$n$单调递增，故只需找临界情况）

$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{3}\times 4^{n+2}+9(n+1)-\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\times 4^{n+1}-9n+\dfrac{4}{3}=4^{n+1}+9>0$，所以$S_{n+1}>S_n$，故$\{S_n\}$是递增数列，

又$S_5=1409<2023$，$S_6=5514>2023$，所以满足$S_n\ge 2023$的最小的正整数$n$为6.

【反思】求数列的最大最小项或$S_n$的最值，如果直接判断困难，基本都会优先考虑单调性.

【例4】已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的部分项$a_{k_1}$，$a_{k_2}$，$a_{k_3}$，…构成等比数列，且$k_1=1$，$k_2=2$，$k_3=5$，则$k_n=$_____.

**解析：**已知条件容易代公式，从而找到$a_1$和$d$的关系，由题意，$a_1$，$a_2$，$a_5$成等比数列，所以$a_2^2=a_1a_5$，



设$\{a_n\}$的公差为$d(d\ne 0)$，则$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，整理得：$d=2a_1$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)\cdot 2a_1=(2n-1)a_1$，

已知等比数列$\{a_{k_n}\}$前3项，足够求出通项$a_{k_n}$了（注意$a_{k_n}$是数列$\{a_{k_n}\}$中的第$n$项），进而得到$k_n$，

设等比数列$\{a_{k_n}\}$的公比为$q$，则$q=\dfrac{a_{k_2}}{a_{k_1}}=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3a_1}{a_1}=3$，所以$a_{k_n}=a_{k_1}\cdot q^{n-1}=a_1\cdot 3^{n-1}$，

又$a_{k_n}=(2k_n-1)a_1$，所以$a_1\cdot 3^{n-1}=(2k_n-1)a_1$，故$k_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$.

**答案：**$\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

【反思】下标$k_n$看起来复杂，其实我们仅仅是将每一个条件用基本公式代入，答案就出来了.

## 强化训练

1.（2023·宁夏石嘴山模拟·★）记等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，若$a_6+a_9=0$，$S_{11}=33$，则公差$d=$_____.

2．（2023 • 全国甲卷 • ★）记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和．若 $a_2+a_6=10$， $a_4a_8=45$，则 $S_5=$（　　）

（A）25　　（B）22　　（C）20　　（D）15

3．（2023 • 山西模拟 • ★★）设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$， $a_4=\frac{1}{2}a_5$，则 $\frac{S_9}{S_4}=$（　　）

（A）15　　（B）1　　（C）$-1$　　（D）$-9$

4．（2022 • 江苏南京模拟 • ★★）把 120 个面包全部分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍，则最小一份面包的个数为（　　）

（A）2　　（B）5　　（C）6　　（D）11



.

5．（2023 • 北京海淀模拟 • ★★）在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1+a_3=10$， $a_2+a_4=-5$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$ _____.

6．（2022 • 上海模拟 • ★★）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $a_4-a_5=2a_6$，则 $\frac{S_2}{a_3}$ 的值为_____.

7．（2022 • 甘肃民勤模拟 • ★★）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_4=8$， $S_6=9S_3$，则 $a_1=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）4

8．（2022 • 北京模拟 • ★★）已知等差数列$\{a_n\}$单调递增且满足$a_1+a_8=6$，则$a_6$的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,3)$　　（B）$(3,6)$　　（C）$(3,+\infty)$　　（D）$(6,+\infty)$

9.（2022 •陕西西安一模 •★★★）设$S_n$是等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$S_3$，$S_9$，$S_6$成等差数列，且$a_4+a_7=2a_n$，则$n=$______.

10．（2022 • 广东模拟 • ★★★）已知$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，若$a_1=b_2=6$，$a_4+b_5=9$，则$a_7+b_8$的值是______.



11．（2023 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列，乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则（　　）

（A）甲是乙的充分条件但不是必要条件

（B）甲是乙的必要条件但不是充分条件

（C）甲是乙的充要条件

（D）甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

12．（2022 • 辽宁模拟 • ★★）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=b_1=3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在①$b_3=12$；②$a_{b_2}=11$；③$a_2+2b_2=3a_3$这三个条件中选一个作为已知条件，使$\{b_n\}$存在且唯一，并求数列$\{b_{a_n}\}$的前$n$项和$S_n$.

13．（2023・全国乙卷・★★★）记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.